ALGORITMA PEMBANGUN MATRIKS KORELASI

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

oleh

HELMAVIRA
10654004474

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU

2012

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin segala puji bagi Allah SWT karena atas rahmat dan karunianya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan judul "Algoritma Pembangun Matriks Korelasi". Shalawat dan salam kepada nabi Muhammad SAW, semoga dengan senantiasa bershalawat kita mendapat syafa'atnya.

Dalam menyelesaikan tugas akhir ini penulis tidak terlepas dari bantuan semua pihak, baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu penulis mengucapkan terima kasih tak terhingga, terutama kepada kedua orang tua tercinta yang tidak pernah lelah dan terhenti melimpahkan kasih sayang, perhatian, motivasi dan doanya yang membuat penulis mampu untuk terus melangkah mempelajari hidup dan juga materi yang tidak mungkin terbalaskan. Jasa-jasamu kan selalu kukenang hingga akhir hayatku, semoga Allah menjadikan jasa-jasamu sebagai amalan shaleh, Amin. Ucapan terima kasih selanjutnya kepada:

1. Bapak Prof. DR. H. M. Nazir selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Yenita Morena, MSi selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc selaku Plt. Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Ibu Fitri Aryani, M.Sc selaku Koordinator Tugas Akhir pada Jurusan Matematika juga selaku pembimbing yang telah banyak membantu, mendukung, mengarahkan dan membimbing penulis dalam penulisan tugas akhir ini.
5. Bapak dan Ibu dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Sultan Syarif Kasim.
6. Adikku Edo dan Aben yang selalu memberikan semangat dan doanya. Semoga kita tumbuh jadi anak-anak yang membanggakan, dan buat

seluruh keluargaku yang telah memberi perhatian, kasih sayang serta motivasi untukku.

7. Seseorang yang selalu setia mendampingiku, memberikan semangat dan doanya.
8. Teman-teman angkatan 2006 di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
9. Sahabat-sahabatku Laina, Devi, Desi, Adri, Agung, adikku Vira, Nofi. M, Ali dan Tika, serta teman kosku Leni dan Phia yang selalu memberikan bantuan dan masukkan yang sangat berguna dalam penulisan tugas akhir ini.
10. Seluruh pihak yang telah memberikan andil dalam proses penulisan tugas akhir ini sampai selesai yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Penulis sangat menyadari dalam penyusunan tugas akhir ini masih banyak kesalahan dan kekurangan. Namun penulis telah berusaha mendapatkan hasil yang terbaik. Oleh karena itu, penulis sangat mengharapkan kritik dan saran dari semua pihak yang sifatnya membangun demi kesempurnaan tugas akhir ini.

Akhirnya penulis berharap semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi penulis dan pihak lain yang memerlukannya.

Pekanbaru, 25 April 2012
Penulis

Helmavira

ALGORITMA PEMBANGUN MATRIKS KORELASI

HELMAVIRA
10654004474

Tanggal Sidang : 25 April 2012

Periode Wisuda : Juli 2012

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas akhir ini membahas algoritma pembangun matriks korelasi. Algoritma pembangun matriks korelasi diperoleh dengan menghitung batas bawah dan batas atas dari determinan submatriks utama dan determinan matriks itu sendiri. Pada matriks korelasi ordo 3×3 dan 4×4 diperoleh matriks korelasi yang valid karena merupakan matriks simetris, nilai-nilai elemennya berada pada interval $[-1,1]$ dan bersifat semi-definit positif. Hasil yang diperoleh untuk matriks korelasi dengan ordo > 4 adalah bilangan imajiner, artinya tidak didapat matriks korelasi yang valid.

Kata Kunci : algoritma pembangun matriks korelasi, bilangan imajiner, koefisien korelasi, matriks korelasi.

GENERATING CORRELATION MATRICES ALGORITHM

HELMAVIRA
10654004474

Date of Final Exam : 25 April 2012

Graduation Ceremony Period : Juli 2012

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
JL. HR. Soebrantas no. 155 Pekanbaru

ABSTRACK

This thesis discusses the generating correlation matrices algorithm. Algorithm builder correlation matrices was obtained by calculating the lower limit and upper limit of the main determinants of submatrices and matrix determinant itself. In the correlation matrices of order 3×3 and 4×4 correlation matrices is obtained which is valid because it is a symmetric matrices, its elements are the values on the interval [-1,1] and is semi-positive definite. The results obtained for the correlation matrices of the order of > 4 is an imaginary number, it means not obtained a valid correlation matrices.

Keyword *: correlation matrices, coefficient correlation, imaginary numbers, the correlation matrix algorithm builders.*

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Informasi dalam bidang matematika dan sains kadang sering ditampilkan dalam bentuk baris-baris atau kolom-kolom yang berbentuk persegi atau pesegi panjang yang disebut matriks. Matriks dapat membantu menyelesaikan masalah-masalah yang rumit menjadi bentuk yang lebih sederhana, sehingga masalah tersebut dapat dipelajari secara lebih mudah.

Ada berbagai jenis matriks diantaranya adalah, matriks bujur sangkar, matriks diagonal, matriks simetris, matriks skalar, matriks korelasi. Masalah korelasi sering dibahas dalam statistik, khususnya regresi multivariat. Korelasi dapat diselesaikan dengan cara matriks. Setiap matriks mempunyai ordo yang berbeda-beda, contohnya: matriks 2×2, matriks 3×4, matriks $n \times n$, matriks kolom, matriks baris, dan lain-lain (Anton, 2002).

Suatu matriks disebut matriks korelasi bila elemen-elemennya adalah koefisien korelasi dengan nilai terletak pada interval $[-1,1]$. Koefisien korelasi adalah suatu nilai untuk mengukur seberapa kuat hubungan antara satu variabel dengan variabel yang lain. Kumpulan koefisien korelasi dapat disusun kedalam sebuah matriks (Graybill, 1983).

Matriks korelasi yang valid adalah matriks korelasi yang bersifat simetris dan semi-definit positif. Karena bersifat semi-definit positif maka dengan merumuskan batasan pada determinan submatriks utama, elemen-elemen matriks korelasi dapat dianalisis sehingga diperoleh syarat yang harus dipenuhi jika ingin membangun matriks korelasi yang valid (Graybill, 1983).

Beberapa penulis telah membahas tentang matriks korelasi, Olkin (1981) telah meneliti bagaimana koefisien korelasi dibatasi, jika sebuah submatriks dari matriks korelasi ditetapkan. Rousseeuw & Molenberghs (1994) telah menggunakan batas interval $[-1,1]$ untuk meneliti bentuk dan volume dari himpunan matriks korelasi 3×3 yang valid.

Berdasarkan jurnal yang berjudul *Generating Valid* 4×4 *Correlation Matrices*, oleh Mark Budden, Paul Hadavas, Lorrie Hoffman, dan Chris Pretz (2007), yang telah membahas algoritma untuk membangun matriks korelasi 4×4 yang valid, maka penulis berminat mengembangkannya yaitu dengan **"Algoritma Pembangun Matriks Korelasi".**

1.2 RumusanMasalah

Berdasarkan latar belakang maka rumusan masalah yang akan dibahas pada tugas akhir ini adalah bagaimana aturan atau langkah-langkah algoritma pembangun matriks korelasi.

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah maka penelitian dibatasi pada matriks korelasi ordo 3×3, 4×4 dan 5×5.

1.4 Tujuan dan Manfaat

1. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui aturan dan langkah-langkah algoritma pembangun matriks korelasi.

2. Manfaat Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian yang telahdikemukakan diatas, maka manfaat yang dapat diambil adalah:

a. Penulis dapat mengembangkan wawasan keilmuan dalam matematika mengenai matriks korelasi.
b. Penulis dapat mengetahui lebih banyak tentang materi matriks yang tentunya akan sangat mempermudah dalam menyelesaikan soal-soal yang berhubungan dengan matriks korelasi.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini mencakup lima bab, yaitu:

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisikan latar belakang masalah, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Landasan Teori

Bab ini berisikan teori-teori pendukung untuk memahami tentang matrik korelasi yaitu: matriks, determinan, bentuk kuadrat dan semi-definit positif, dan matriks korelasi.

Bab III Metodologi Penelitian

Bab ini berisikan tentang Studi pustaka atau literatur, yaitu dengan membaca buku-buku dan sumber-sumber lain yang berhubungan dengan matriks korelasi.

Bab IV Pembahasan

Bab ini berisikan pemaparan cara-cara dengan teoritis dalam mendapatkan hasil penelitian tersebut.

Bab V Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

Landasan teori yang akan digunakan untuk pembahasan selanjutnya mengenai matriks korelasi dengan ordo 5×5 adalah:

2.1 Matriks

Ukuran matriks dinyatakan dalam jumlah baris (arah horizontal) dan kolom (arah vertikal) yang dimilikinya. Misalkan jika digunakan A untuk menyatakan matriks, maka digunakan a_{ij} untuk entrinya dalam baris i dan kolom j. Jadi matriks $m \times n$ secara umum dapat dinyatakan sebagai:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij}) \text{ dengan } i = 1,2,\dots,m \text{ dan } j = 1,2,\dots,n.$$

Definisi 2.1.1 (Anton Howard, 2002) Misalkan A matriks $m \times n$, maka transpos dari A dinyatakan dengan A^T, didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari A sehingga kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A, kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A dan seterusnya, dan dinotasikan dengan A^T, atau dapat ditulis:

$$\text{Jika } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ maka } A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = a_{ij}.$$

Definisi 2.1.2 (Leon, 2001) Misalkan $n \times n$ dengan semua entri pada diagonalnya adalah satu dan nol, selainnya disebut matriks identitas $n \times n$, dinotasikan dengan:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

dengan kata lain, $I_n = (a_{ij})$ dimana $a_{ij} = 1$ untuk $i = j$ dan $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$.

Definisi 2.1.3 (Anton Howard, 2002) Matriks diagonal suatu matriks bujursangkar yang semua entrinya yang tidak terletak pada diagonal utama adalah nol, dapat ditunjukkan dengan notasi

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

2.2 Determinan

Definisi 2.2.1 (Leon, S.J 2001) Misalkan A adalah matriks bujursangkar,maka minor dari elemen a_{ij} yang dinotasikan dengan M_{ij} adalah determinan submatriks yang diperoleh dengan menghapus baris ke i dan kolom j dari matriks A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinotasikan C_{ij} dinamakan kofaktor dari elemen a_{ij} .

Definisi 2.2.2 (Leon, S.J 2001) Determinan dari suatu matriks A berukuran $n \times n$ dinyatakan sebagai $\det(A)$ adalah suatu skalar yang dikalikan dengan matriks A dan didefinisikan secara induktif sebagai:

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11}\,, jika\ n = 1 \\ a_{11}A_{11} + A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}\,, jika\ n > 1 \end{cases}$$

dimana $A_{1j} = (-1)^{1+j} \det M_{ij}$ dengan $j = 1, \cdots, n$ adalah kofaktor-kofaktor dikalikan dengan entri-entri dalam baris pertama dari A.

Definisi 2.2.3 (Anton Howard, 2002) Misalkan A matriks bujur sangkar $n \times n$. Submatriks utama A_k adalah submatriks yang terbentuk dari k baris pertama dan k kolom pertama dari matriks A, dengan $k = 1,2, \cdots, n$.

Contoh 2.2.1:

Determinan untuk matriks 2x2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

maka:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Contoh 2.2.2:

Determinan untuk matriks 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

maka:

$$\det(A) = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12}\, det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

2.3 Bentuk Kuadrat dan Semi –Definit positif

Definisi 2.3.1. (Sutojo, 2010) Matriks simetris adalah matriks yang transposnya sama dengan dirinya sendiri.

Contoh 2.3.1:

$= \begin{bmatrix} 17 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 17 \end{bmatrix}$ dan $A^T = \begin{bmatrix} 17 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 17 \end{bmatrix}$, karena $A = A^T$ maka A adalah simetris.

Definisi 2.3.2 (Anton Howard, 2002) Bentuk kuadrat pada variabel $x_1, x_2, \cdots, x_n$ adalah ekspresi yang dapat ditulis sebagai

$$x_1, x_2, \cdots x_n]A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Dengan A adalah matriks simetris berukuran $n \times n$. Jadi misalkan

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Maka bentuk ini dapat ditulis sebagai $x^T Ax$.

Definisi 2.3.3 (Anton Howard, 2002) Bentuk kuadrat $x^T Ax$ disebut semi-definit positif jika $x^T Ax \geq 0$ untuk semua $x \neq 0$, sedangkan matriks simetris A disebut matriks semi-definit positif jika $x^T Ax$ adalah bentuk kuadrat semi-definit positif.

Contoh 2.3.2:

Misalkan sebuah matriks simetris berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Untuk mengkaji apakah matriks A bersifat definit positif maka:

$$x^T Ax = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$x^T Ax = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

Sehingga hasilnya adalah

$$x^T Ax = x_1(2x_1 - x_2) + x_2(-x_1 + 2x_2 - x_3) + x_3(-x_2 + 2x_3)$$

$$x^T Ax = 2{x_1}^2 - x_1x_2 + 2{x_2}^2 - x_2x_3 - x_2x_3 + 2{x_3}^2$$

$$x^T Ax = 2{x_1}^2 - 2x_1x_2 + 2{x_2}^2 - 2x_2x_3 + 2{x_3}^2$$

$$x^T Ax = {x_1}^2 + ({x_1}^2 - 2x_1x_2 + {x_2}^2) + ({x_2}^2 - 2x_2x_3 + {x_3}^2) + {x_3}^2$$

$$x^T Ax = {x_1}^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + {x_3}^2$$

Dapat disimpulkan bahwa matriks A bersifat definit positif karena memenuhi:

${x_1}^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + {x_3}^2 > 0$ kecuali jika $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

Sebaliknya matrik A dan bentuk kuadrat $x^T Ax$ disebut:

1. Definit negatif jika $x^T Ax < 0$, untuk semua $x \neq 0$
2. Semi definit positif jika $x^T Ax \geq 0$, untuk semua x
3. Semi definit negatif jika $xAx \leq 0$, untuk semua x

Syarat perlu dan syarat cukup untuk bentuk $x^T Ax$ sebagai definit positif adalah:

$$h_{11} > 0, \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix} > 0, \cdots, |A| > 0.$$

Teorema 2.3.1 (Anton Howard, 2002) Matriks simetris A adalah semi-definit positif jika dan hanya jika determinan submatriks utama adalah positif.

Bukti:

Diketahui matriks $A = [a_{ij}]$, dengan $i, j = 1,2, \cdots, n$ adalah semi-definit positif, akan dibuktikan determinan setiap submatriks utama adalah tak negatif.

Bentuk kuadrat $x^T Ax \geq 0$ adalah semi definit positif untuk semua $x \neq 0$. Jika A_k, dengan $k = 1,2, \cdots, n$ adalh submatriks utama semi-definit positif, maka akan diperoleh $x^T A_k x \geq 0$. Diketahui $x \neq 0$ maka diperoleh $det(A_k) \geq 0$ sehingga determinan submatriks utama A_k dengan $k = 1,2, \cdots, n$ adalah tak negatif.

Akan dibuktikan matriks simetris A adalah semi-definit positif.

Karena $det(A_k)$ tak negatif maka $det(A_k) \geq 0$ untuk $k = 1,2, \cdots, n$, sehingga diperoleh bentuk kuadrat $x^T A_k x \geq 0$, untuk semua $x \neq 0$.

Berdasarkan definisi 2.3.3, jika $k = n$, maka $A_k = A_n = A$, maka diperoleh bentuk kuadrat $x^T A x \geq 0$, untuk semua $x \neq 0$.

Berdasarkan definisi 3.2, matriks A adalah matriks simetris berukuran $n \times n$. Jadi matriks simetris A adalah semi-definit positif.

2.4 Matriks korelasi

Matriks korelasi yaitu sebuah matriks dengan elemen-elemen matriks yang merupakan koefisien korelasi dengan nilai terletak pada interval $[-1,1]$ dan khusus elemen diagonal matriks bernilai satu.

Definisi 2.4.1 (Graybill, Franklin A, 1983) Misalkan x adalah vektor random $(n \times 1)$ dan V adalah matriks kovariansi semi definit positif $(n \times n)$, maka matriks korelasi dari vektor random x adalah $R = r_{ij}]$, dengan r_{ij} didefinisikan:

$r_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}}$ untuk semua $i, j \in \{1,2, \cdots, n\}$.

Keterangan: r_{ij} = koefisien korelasi

σ_{ij} = kovariansi

$\sigma_{ii,}\sigma_{jj}$ = variansi

Teorema2.4.1 (Graybill, Franklin A, 1983) Misalkan x adalah vektor random $(n \times 1)$ dan V adalah matriks kovariansi semi-definit positif $(n \times n)$, maka V akan membentuk matriks korelasi R sebagai berikut:

$R = D_v^{-1/2} V D_v^{-1/2}$

Dimana D_v adalah matriks diagonal dengan elemen diagonal $\sigma_{ii}, i \in \{1,2, \cdots, n\}$.

Bukti:

Diketahui matriks diagonal D_v dan matriks kovariansi semi-definit positif V yaitu

$$D_v = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriks diagonal untuk $D_v{}^{-1/2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\sigma_{11}}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{\sigma_{nn}}} \end{bmatrix}$

maka diperoleh

$$D_v{}^{-1/2} V D_v{}^{-1/2} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{11}}} & \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{\sigma_{1n}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{nn}}} \\ \frac{\sigma_{21}}{\sqrt{\sigma_{22}\sigma_{11}}} & \frac{\sigma_{22}}{\sqrt{\sigma_{22}\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{\sigma_{2n}}{\sqrt{\sigma_{22}\sigma_{nn}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_{n1}}{\sqrt{\sigma_{nn}\sigma_{11}}} & \frac{\sigma_{n2}}{\sqrt{\sigma_{nn}\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{\sigma_{nn}}{\sqrt{\sigma_{nn}\sigma_{nn}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{12} & 1 & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1n} & r_{2n} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi terbukti $R = D_v{}^{-1/2} V D_v{}^{-1/2}$.

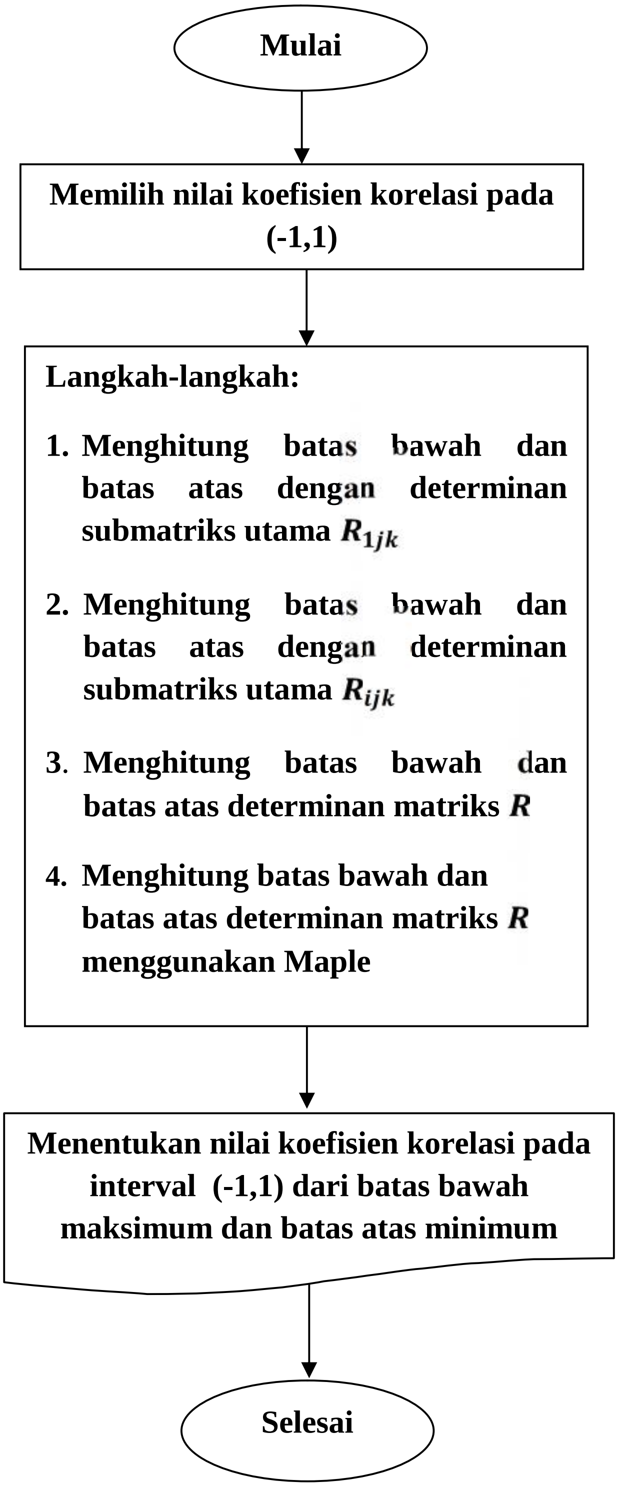
BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi penelitian yang penulis gunakan adalah studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1) Memilih nilai koefisien korelasi pada interval $(-1,1)$.
2) Menghitung batas bawah (L) dan batas atas (U) dari koefisin korelasi dengan determinan submatriks utama R_{1jk}.
3) Menghitung batas bawah (L) dan batas atas (U) dari koefisin korelasi dengan determinan submatriks utama R_{ijk}.
4) Menghitung batas bawah (L) dan batas atas (U) dari koefisin korelasi dengan determinan matriks R.
5) Menghitung batas bawah (L) dan batas atas (U) dari koefisin korelasi dengan determinan matriks R menggunakan maple 13.
6) Menentukan nilai koefisien korelasi pada interval $(-1,1)$ dari batas bawah maksimum dan batas atas minimum.

Langkah-langkah metodologi penelitian diatas dapat digambarkan dalam *flowchart* sebagai berikut:



Gambar 3.1 *Flowchart* Metodologi Penelitian

BAB IV

PEMBAHASAN

Matriks korelasi yang valid adalah matriks korelasi yang bersifat simetris dan semi-definit positif, karena bersifat semi definit positif maka dengan merumuskan batasan pada determinan submatriks utama dapat dibangun matriks korelasi. Pada bab ini akan dijelaskan algoritma pembangun matriks korelasi ordo 5×5.

4.1 Algoritma Pembangun Matriks Korelasi Ordo 3×3

Misalkan r_{ij} adalah koefisien korelasi untuk variabel x_i dan x_j, dimana $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Matriks korelasi 3×3 adalah matriks korelasi semi-definit positif dari

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & 1 & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

Algoritma pembangun matriks korelasi ordo 3×3 adalah:

1. Memilih sebarang nilai koefisien korelasi r_{12} dan r_{13} pada interval $(-1,1)$ atau $-1 \leq r_{12} \leq 1$ dan $-1 \leq r_{13} \leq 1$.
2. Menentukan nilai r_{23} dengan determinan dari matriks R, yaitu:

   $det\ R = -r_{23}^2 + (2r_{12}r_{13})r_{23} + (1 - r_{12}^2 - r_{13}^2) \geq 0$, didapat batas untuk r_{23} adalah $L_{23} \leq r_{23} \leq U_{23}$

   dengan batas bawah

   $$L_{23} = r_{12}r_{13} - \sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{13}^2)}$$

   dan batas atas

   $$U_{23} = r_{12}r_{13} + \sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{13}^2)}$$

3. R adalah matriks korelasi jika r_{23} memenuhi

$$r_{12}r_{13} - \sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{13}^2)} \leq r_{23} \leq r_{12}r_{13} + \sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{13}^2)}$$

4. Misalkan $r_{12} = 0$ rentang nilai yang mungkin dari r_{23} adalah

$$-\sqrt{1 - r_{13}^2} \leq r_{23} \leq \sqrt{1 - r_{13}^2}$$

Contoh 4.1.1

Akan ditentukan algoritma pembangun matriks korelasi dari matriks

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & 1 & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Langkah 1

Dipilih sebarang nilai $r_{12} = 0{,}05$ $r_{13} = 0{,}001$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}05 & 0{,}001 \\ 0{,}05 & 1 & r_{23} \\ 0{,}001 & r_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

Langkah 2

Menentukan nilai L_{23} dan U_{23} dengan determinan dari matriks R, yaitu:

$$L_{23} = 0{,}05 \times 0{,}001 - \sqrt{(1 - 0{,}05^2)(1 - 0{,}001^2)}$$

$$= -0{,}9987$$

$$U_{23} = 0{,}05 \times 0{,}001 + \sqrt{(1 - 0{,}05^2)(1 - 0{,}001^2)}$$

$$= -0{,}9988$$

Langkah 3

Misalkan $r_{12} = 0$ rentang nilai yang mungkin untuk r_{23} adalah

$$-\sqrt{1 - 0{,}001^2} \leq r_{23} \leq \sqrt{1 - 0{,}001^2}$$

$$-0{,}99 \leq r_{23} \leq 0{,}99$$

Maka diperoleh matriks korelasi 3×3 yang valid adalah

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}05 & 0{,}001 \\ 0{,}05 & 1 & 0{,}99 \\ 0{,}001 & 0{,}99 & 1 \end{bmatrix}.$$

Akan ditunjukkan matriks R memenuhi semi-definit positif

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}05 & 0{,}001 \\ 0{,}05 & 1 & 0{,}99 \\ 0{,}001 & 0{,}99 & 1 \end{bmatrix} \text{ maka } \det R = 0{,}17$$

Selanjutnya akan ditunjukkan $R = R^T$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}05 & 0{,}001 \\ 0{,}05 & 1 & 0{,}99 \\ 0{,}001 & 0{,}99 & 1 \end{bmatrix} \qquad R^T = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}05 & 0{,}001 \\ 0{,}05 & 1 & 0{,}99 \\ 0{,}001 & 0{,}99 & 1 \end{bmatrix}$$

Terbukti matriks R adalah matriks korelasi 3×3 yang valid

Contoh 4.1.2

Akan ditentukan algoritma pembangun matriks korelasi dari matriks

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & 1 & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Langkah 1

Dipilih sebarang nilai $r_{12} = 0{,}03$ $r_{13} = 0{,}21$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}03 & 0{,}21 \\ 0{,}03 & 1 & r_{23} \\ 0{,}21 & r_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

Langkah 2

Menentukan nilai L_{23} dan U_{23} dengan determinan dari matriks R, yaitu:

$$L_{23} = 0{,}03 \times 0{,}21 - \sqrt{(1 - 0{,}03^2)(1 - 0{,}21^2)}$$

$$= -0{,}9987$$

$$U_{23} = 0{,}03 \times 0{,}21 + \sqrt{(1 - 0{,}03^2)(1 - 0{,}21^2)}$$

$$= 0{,}9987$$

Langkah 3

Misalkan $r_{12} = 0$ rentang nilai yang mungkin untuk r_{23} adalah

$$-\sqrt{1 - 0{,}21^2} \leq r_{23} \leq \sqrt{1 - 0{,}21^2}$$

$$-0{,}97 \leq r_{23} \leq 0{,}97$$

Maka diperoleh matriks korelasi 3×3 yang valid adalah

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}03 & 0{,}21 \\ 0{,}03 & 1 & 0{,}97 \\ 0{,}21 & 0{,}97 & 1 \end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan matriks R memenuhi semi definit positif

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}03 & 0{,}21 \\ 0{,}03 & 1 & 0{,}97 \\ 0{,}21 & 0{,}97 & 1 \end{bmatrix} \text{ maka } \det R = 0{,}26322.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan $R = R^T$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}03 & 0{,}21 \\ 0{,}03 & 1 & 0{,}97 \\ 0{,}21 & 0{,}97 & 1 \end{bmatrix} \qquad R^T = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}03 & 0{,}21 \\ 0{,}03 & 1 & 0{,}97 \\ 0{,}21 & 0{,}97 & 1 \end{bmatrix}$$

Terbukti matriks R adalah matriks korelasi 3×3 yang valid

4.2 Algoritma Pembangun Matriks Korelasi Ordo 4×4

Bentuk umum matriks korelasi ordo 4×4 adalah

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{12} & 1 & r_{23} & r_{24} \\ r_{13} & r_{23} & 1 & r_{34} \\ r_{14} & r_{24} & r_{34} & 1 \end{bmatrix}.$$

Algoritma pembangun matriks korelasi ordo 4×4 adalah:

1. Memilih sebarang nilai koefisien korelasi r_{12}, r_{13} dan r_{14} pada interval $(-1,1)$

2. Menyelesaikan determinan submatriks utama R_{1jk}, $\det(R_{1jk}) \geq 0$ untuk $j, k \in \{2,3,4\}$ dan $j \neq k$,submatriks utama R_{1jk} adalah:

   $$R_{1jk} = \begin{bmatrix} 1 & r_{1j} & r_{1k} \\ r_{1j} & 1 & r_{jk} \\ r_{1k} & r_{jk} & 1 \end{bmatrix}$$

   $\det(R_{1jk}) = 1 - r_{jk}^2 - r_{1j}^2 + 2r_{1j}r_{1k}r_{jk} - r_{1k}^2$, didapat batas untuk r_{jk} adalah $L_{jk}^{(1)} \leq r_{jk} \leq U_{jk}^{(1)}$

   dengan batas bawah

   $$L_{jk}^{(1)} = r_{1j}r_{1k} - \sqrt{(1 - r_{1j}^2)(1 - r_{1k}^2)}$$

   dan batas atas

   $$U_{jk}^{(1)} = r_{1k}r_{1k} + \sqrt{(1 - r_{1j}^2)(1 - r_{1k}^2)}$$

3. Menyelesaikan determinan submatriks utama R_{ijk}, dengan $det(R_{ijk}) \geq 0$ untuk $i, j, k \in \{2,3,4\}$ dan $i \neq j \neq k$,submatriks utama R_{ijk} adalah:

   $$R_{ijk} = \begin{bmatrix} 1 & r_{ij} & r_{ik} \\ r_{ij} & 1 & r_{jk} \\ r_{ik} & r_{jk} & 1 \end{bmatrix}$$

$detR_{ijk} = 1 - r_{jk}^2 - r_{ij}^2 + 2r_{ij}r_{ik}r_{jk} - r_{1k}^2$, didapat batas untuk r_{jk} adalah

$$L_{jk}^{(2)} \leq r_{jk} \leq U_{jk}^{(2)},$$

dengan batas bawah

$$L_{jk}^{(2)} = r_{ij}r_{ik} - \sqrt{(1 - r_{ij}^2)(1 - r_{ik}^2)}$$

dan batas atas

$$U_{jk}^{(2)} = r_{ij}r_{ik} + \sqrt{(1 - r_{ij}^2)(1 - r_{ik}^2)}$$

4. Menyelesaikan determinan matriks$R, det(R) \geq 0$, dengan bentuk umum

$$\begin{aligned} detR = 1 - r_{12}^2 - r_{13}^2 - r_{14}^2 - r_{23}^2 - r_{24}^2 - r_{34}^2 + r_{12}^2 r_{34}^2 + r_{13}^2 r_{24}^2 + r_{14}^2 r_{23}^2 \\ + 2r_{23}r_{24}r_{34} + 2r_{12}r_{13}r_{23} + 2r_{12}r_{14}r_{24} + 2r_{13}r_{14}r_{34} \\ - 2r_{12}r_{14}r_{23}r_{34} - 2r_{13}r_{14}r_{23}r_{24} - 2r_{12}r_{13}r_{24}r_{34}. \end{aligned}$$

Kemudian dicari faktor kuadrat untuk setiap $r_{jk} \in (r_{23},\ r_{24},\ r_{34})$, dengan bentuk umum batasan

$$L_{jk}^{(3)} \leq r_{jk} \leq U_{jk}^{(3)}$$

dengan batas bawah

$$L_{jk}^{(3)} = \frac{r_{ji}r_{ki} + r_{1j}r_{1k} - r_{1j}r_{1i}r_{ki} - r_{1k}r_{1i}r_{ji} - \sqrt{det(R_{1ji}).\,det(R_{1ki})}}{1 - r_{1i}^2}$$

dan batas atas

$$U_{jk}^{(3)} = \frac{r_{ji}r_{ki} + r_{1j}r_{1k} - r_{1j}r_{1i}r_{ki} - r_{1k}r_{1i}r_{ji} + \sqrt{det(R_{1ji})det(R_{ki})}}{1 - r_{1i}^2}$$

Setelah melakukan langkah penghitungan diatas, untuk mendapatkan jaminan terbangunnya suatu matriks korelasi, maka masing-masing nilai harus berada didalam batas interval berikut:

$$maks\left\{L_{jk}^{(1)}, L_{jk}^{(2)}, L_{jk}^{(3)}\right\} \le r_{jk} \le min\left\{U_{jk}^{(1)}, U_{jk}^{(2)}, U_{jk}^{(3)}\right\}.$$

Contoh 4.2.1

Akan ditentukan algoritma pembangun matriks korelasi dari matriks

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{12} & 1 & r_{23} & r_{24} \\ r_{13} & r_{23} & 1 & r_{34} \\ r_{14} & r_{24} & r_{34} & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Langkah 1

Dipilih sebarang nilai $r_{12} = 0{,}05$ $r_{13} = 0{,}001$ $r_{14} = 0{,}8$

Matriks $R = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}05 & 0{,}001 & 0{,}8 \\ 0{,}05 & 1 & r_{23} & r_{24} \\ 0{,}001 & r_{23} & 1 & r_{34} \\ 0{,}8 & r_{34} & r_{34} & 1 \end{bmatrix}$

Langkah 2

Menghitung batas bawah dan batas atas dari $r_{23}, r_{24},$ dan r_{34} dengan determinan submatriks utama $R_{1jk}, \det(R_{1jk}) \ge 0$ untuk $j, k \in \{2,3,4\}$ dan $j \ne k$.

a. Batas interval untuk koefisien korelasi r_{23} yaitu

$$L_{23}^{(1)} \le r_{23} \le U_{23}^{(1)}$$

dengan batas bawah

$$L_{23}^{(1)} = 0{,}05 \times 0{,}001 - \sqrt{(1 - 0{,}05^2)(1 - 0{,}001^2)}$$

$$= -0{,}9987$$

dan batas atas

$$U_{23}^{(1)} = 0,05 \times 0,001 + \sqrt{(1 - 0,05^2)(1 - 0,001^2)}$$

$$= 0,9987$$

interval untuk koefisien korelasi r_{23} yaitu $-0,9987 \leq r_{23} \leq 0,9987$

b. Batas interval untuk koefisien korelasi r_{24} yaitu

$$L_{24}^{(1)} \leq r_{24} \leq U_{24}^{(1)}$$

dengan batas bawah

$$L_{24}^{(1)} = 0,05 \times 0,8 - \sqrt{(1 - 0,05^2)(1 - 0,8^2)}$$

$$= -0,5592$$

dan batas atas

$$U_{24}^{(1)} = 0,05 \times 0,8 + \sqrt{(1 - 0,05^2)(1 - 0,8^2)}$$

$$= 0,6392$$

interval untuk koefisien korelasi r_{24} yaitu $-0,5592 \leq r_{24} \leq 0,6392$

c. Batas interval untuk koefisien korelasi r_{34} yaitu

$$L_{34}^{(1)} \leq r_{34} \leq U_{34}^{(1)}$$

dengan batas bawah

$$L_{34}^{(1)} = 0,001 \times 0,8 - \sqrt{(1 - 0,001^2)(1 - 0,8^2)}$$

$$= -0,5991$$

dan batas atas

$$U_{34}^{(1)} = 0,001 \times 0,8 + \sqrt{(1 - 0,001^2)(1 - 0,8^2)}$$

$= 0{,}6007$

interval untuk koefisien korelasi r_{34} yaitu $-0{,}5991 \leq r_{34} \leq \ 0{,}6007$

Langkah 3

Menghitung batas bawah dan batas atas dari r_{23}, r_{24}, dan r_{34} dengan determinan submatriks utama $R_{ijk}, \det(R_{ijk}) \geq 0$ untuk $i, j, k \ \in \{2,3,4\}$ dan $i \neq j \neq k$.

a. Batas interval untuk koefisien korelasi r_{23} yaitu

$$L_{23}^{(2)} \leq r_{23} \leq U_{23}^{(2)}$$

dengan batas bawah

$$L_{23}^{(2)} = 0{,}3196 \times 0{,}3003 - \sqrt{(1 - 0{,}3196^2)(1 - 0{,}3003^2)}$$

$$= -0{,}2007$$

dan batas atas

$$U_{23}^{(2)} = 0{,}3196 \times 0{,}3003 + \sqrt{(1 - 0{,}3196^2)(1 - 0{,}3003^2)}$$

$$= 0{,}1925$$

interval untuk nilai koefisien korelasi r_{23} yaitu $-0{,}2007 \leq r_{23} \leq \ 0{,}1925$.

b. Batas interval untuk koefisien korelasi r_{24} yaitu

$$L_{24}^{(2)} \leq r_{24} \leq U_{24}^{(2)}$$

dengan batas bawah

$$L_{24}^{(2)} = -0{,}499 \times 0{,}3003 - \sqrt{(1 - (-0{,}499)^2)(1 - 0{,}3003^2)}$$

$$= -0{,}4223$$

dan batas atas

$$U_{24}^{(2)} = -0{,}499 \times 0{,}3003 + \sqrt{(1-(-0{,}499)^2)(1-0{,}3003^2)}$$

$$= 0{,}1227$$

interval untuk nilai koefisien korelasi r_{24} yaitu $-0{,}4223 \le r_{24} \le\ 0{,}1227$.

c. Batas interval untuk koefisien korelasi r_{34} yaitu

$$L_{34}^{(2)} \le r_{34} \le U_{34}^{(2)}$$

dengan batas bawah

$$L_{34}^{(2)} = -0{,}499 \times 0{,}3196 - \sqrt{(1-0{,}499^2)(1-0{,}3196^2)}$$

$$= -0{,}9805$$

dan batas atas

$$U_{34}^{(2)} = 0{,}499 \times 0{,}3196 + \sqrt{(1-0{,}499^2)(1-0{,}3196^2)}$$

$$= 0{,}6617$$

interval untuk nilai koefisien korelasi r_{34} yaitu $-0{,}9805 \le r_{34} \le 0{,}6617$

Langkah 4

Menghitung batas bawah dan batas atas dari $r_{23}, r_{24},$ dan r_{34} dengan determinan matriks $R, \det(R) \ge 0$

a. Batas interval untuk koefisien korelasi r_{23} yaitu

$$L_{23}^{(3)} \le r_{23} \le U_{23}^{(3)}$$

dengan batas bawah

$$L_{23}^{(3)} = \frac{r_{24}r_{34} + r_{12}r_{13} - r_{12}r_{14}r_{34} - r_{13}r_{14}r_{24} - \sqrt{det(R_{124}).det(R_{134})}}{1 - r_{14}^2}$$

$L_{23}^{(3)}$

$$= \frac{0{,}3196.0{,}3003 + 0{,}05.0{,}001 - 0{,}05.0{,}8.0{,}3003 - 0{,}001.0{,}8.0{,}3196 - \sqrt{0{,}2809.0{,}2702}}{1 - 0{,}8^2}$$

$= -0{,}5327$

dan batas atas

$$U_{23}^{(3)} = \frac{r_{24}r_{34} + r_{12}r_{13} - r_{12}r_{14}r_{34} - r_{13}r_{14}r_{24} + \sqrt{det(R_{124}).det(R_{134})}}{1 - r_{14}^2}$$

$U_{23}^{(3)}$

$$= \frac{0{,}3196.0{,}3003 + 0{,}05.0{,}001 - 0{,}05.0{,}8.0{,}3003 - 0{,}001.0{,}8.0{,}3196 + \sqrt{0{,}2809.0{,}2702}}{1 - 0{,}8^2}$$

$= 0{,}9972$

interval untuk nilai koefisien korelasi r_{23} yaitu $-0{,}5372 \leq r_{23} \leq\ 0{,}9972$

b. Batas interval untuk koefisien korelasi r_{24} yaitu

$L_{24}^{(3)} \leq r_{24} \leq U_{24}^{(3)}$

dengan batas bawah

$$L_{24}^{(3)} = \frac{r_{23}r_{34} + r_{12}r_{14} - r_{12}r_{13}r_{34} - r_{13}r_{14}r_{23} - \sqrt{det(R_{123}).det(R_{134})}}{1 - r_{13}^2}$$

$L_{24}^{(3)}$

$$= \frac{0{,}3196.0{,}3003 + 0{,}05.0{,}8 - 0{,}05.0{,}001.0{,}3003 - 0{,}001.0{,}8.-0{,}49 - \sqrt{0{,}7484.0{,}2702}}{1 - 0{,}001^2}$$

$= -0{,}3493$

dan batas atas

$$U_{24}^{(3)} = \frac{r_{23}r_{34} + r_{12}r_{14} - r_{12}r_{13}r_{34} - r_{13}r_{14}r_{23} + \sqrt{det(R_{123}).det(R_{134})}}{1 - r_{13}^2}$$

$U_{24}^{(3)}$

$$= \frac{0{,}56.0{,}19 + 0{,}001.0{,}8 - 0{,}05.0{,}001.0{,}34 - 0{,}001.0{,}8.0{,}56 + \sqrt{0{,}6839.0{,}2449}}{1 - 0{,}001^2}$$

$= 0{,}5499$

interval untuk nilai koefisien korelasi r_{24} yaitu $-0{,}3493 \leq r_{24} \leq \ 0{,}5499$.

c. Batas interval untuk koefisien korelasi r_{34} yaitu

$L_{34}^{(3)} \leq r_{34} \leq U_{34}^{(3)}$

dengan batas bawah

$$L_{34}^{(3)} = \frac{r_{23}r_{24} + r_{13}r_{14} - r_{12}r_{13}r_{24} - r_{12}r_{24}r_{23} - \sqrt{det(R_{123}).det(R_{124})}}{1 - r_{12}^2}$$

$L_{34}^{(3)}$

$$= \frac{-0{,}499.0{,}3196 + 0{,}001.0{,}8 - 0{,}05.0{,}001.0{,}3196 - 0{,}05.0{,}3196 - .0{,}499 - \sqrt{0{,}7484.0{,}2809}}{1 - 0{,}05^2}$$

$= -0{,}6107$

dan batas atas

$$U_{34}^{(3)} = \frac{r_{23}r_{24} + r_{13}r_{14} - r_{12}r_{13}r_{24} - r_{12}r_{24}r_{23} - \sqrt{det(R_{123}).det(R_{124})}}{1 - r_{12}^2}$$

$U_{34}^{(3)}$

$$= \frac{-0{,}499.0{,}3196 + 0{,}001.0{,}8 - 0{,}05.0{,}001.0{,}3196 - 0{,}05.0{,}3196. -0{,}499 - \sqrt{0{,}7484.0{,}2809}}{1 - 0{,}05^2}$$

$= 0{,}3085$

interval untuk nilai koefisien korelasi r_{34} yaitu $-0{,}6107 \leq r_{34} \leq 0{,}3085$.

Diperoleh matriks korelasi untuk r_{23} dalam batas interval

$maks\left\{L_{23}^{(1)}, L_{23}^{(2)}, L_{23}^{(3)}\right\} \leq r_{23} \leq min\left\{U_{23}^{(1)}, U_{23}^{(2)}, U_{23}^{(3)}\right\}$ yaitu:

$maks\{-0{,}9987, -0{,}2007, -0{,}5327\} \leq r_{23} \leq min\{0{,}9987, 0{,}1925, 0{,}9972\}$

Maka batas interval untuk koefisien korelasi r_{23} yaitu:

$-0{,}9987 \leq r_{23} \leq 0{,}1925$

Dipilih $r_{23} = 0{,}1925$

Diperoleh matriks korelasi untuk r_{24} dalam batas interval

$maks\left\{L_{24}^{(1)}, L_{24}^{(2)}, L_{24}^{(3)}\right\} \leq r_{24} \leq min\left\{U_{24}^{(1)}, U_{24}^{(2)}, U_{24}^{(3)}\right\}$ yaitu:

$maks\{-0{,}5592, -0{,}4223, -0{,}3493\} \leq r_{24} \leq min\{0{,}6392, 0{,}1227, 0{,}54999\}$

Maka batas interval untuk koefisien korelasi r_{24} yaitu:

$-0{,}3493 \leq r_{24} \leq 0{,}1227$

Dipilih $r_{24} = 0{,}1227$

Diperoleh matriks korelasi untuk r_{34} dalam batas interval

$maks\left\{L_{34}^{(1)}, L_{34}^{(2)}, L_{34}^{(3)}\right\} \leq r_{34} \leq min\left\{U_{34}^{(1)}, U_{34}^{(2)}, U_{34}^{(3)}\right\}$ yaitu:

$maks\{-0{,}5991, -0{,}9805, -0{,}6107\} \leq r_{34} \leq min\{0{,}6007, 0{,}6617, 0{,}3085\}$

Maka batas interval untuk koefisien korelasi r_{34} yaitu:

$-0{,}5991 \leq r_{34} \leq 0{,}3085$

Dipilih $r_{34} = 0{,}3085$

Maka diperoleh matriks korelasi 4×4 yaitu:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0,0500 & 0,0010 & 0,8000 \\ 0,0500 & 1 & 0,1925 & 0,1227 \\ 0,0010 & 0,1925 & 1 & 0,3085 \\ 0,8000 & 0,1227 & 0,3085 & 1 \end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan matriks R memenuhi semi definit positif

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0,0500 & 0,0010 & 0,8000 \\ 0,0500 & 1 & 0,1925 & 0,1227 \\ 0,0010 & 0,1925 & 1 & 0,3085 \\ 0,8000 & 0,1227 & 0,3085 & 1 \end{bmatrix} \text{ maka } \det R = 0,2542$$

Selanjutnya akan ditunjukkan $R = R^T$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0,0500 & 0,0010 & 0,8000 \\ 0,0500 & 1 & 0,1925 & 0,1227 \\ 0,0010 & 0,1925 & 1 & 0,3085 \\ 0,8000 & 0,1227 & 0,3085 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R^T = \begin{bmatrix} 1 & 0,0500 & 0,0010 & 0,8000 \\ 0,0500 & 1 & 0,1925 & 0,1227 \\ 0,0010 & 0,1925 & 1 & 0,3085 \\ 0,8000 & 0,1227 & 0,3085 & 1 \end{bmatrix}$$

Terbukti matriks R adalah matriks korelasi 4×4 yang valid

4.3 Algoritma Pembangun Matriks Korelasi Ordo 5×5

Bentuk umum matriks korelasi ordo 5×5

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} \\ r_{12} & 1 & r_{23} & r_{24} & r_{25} \\ r_{13} & r_{23} & 1 & r_{34} & r_{35} \\ r_{14} & r_{24} & r_{34} & 1 & r_{45} \\ r_{15} & r_{25} & r_{35} & r_{45} & 1 \end{bmatrix}$$

Algoritma pembangun matriks korelasi ordo 5×5 adalah:

1. Memilih sebarang nilai koefisien korelasi r_{12}, r_{13}, r_{14} dan r_{15} pada interval $(-1,1)$.

2. Menentukan koefisien korelasi menggunakan submatriks utama 3×3 yaitu:

   $$r_{1jk} = \begin{bmatrix} 1 & r_{1j} & r_{1k} \\ r_{1j} & 1 & r_{jk} \\ r_{1k} & r_{jk} & 1 \end{bmatrix}$$

   untuk $j, k \in (2, 3, 4, 5)$ dan $j \neq k$.

   a. Jika ditetapkan koefisien korelasi r_{12} dan r_{13} dalam interval $(-1, 1)$ submatriks utamanya adalah:

   $$R_{123} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & 1 & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

   $$det(R_{123}) = -r_{23}^2 + (2r_{12}r_{13})r_{23} + (1 - r_{12}^2 - r_{13}^2) \geq 0$$

   Batas interval untuk koefisien korelasi r_{23} adalah:

   $$L_{23}^{(1)} \leq r_{23} \leq U_{23}^{(1)}$$

   dengan batas bawah

   $$L_{23}^{(1)} = r_{12}r_{13} - \sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{13}^2)}$$

   dan batas atas

   $$U_{23}^{(1)} = r_{12}r_{13} + \sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{13}^2)}$$

   b. Jika ditetapkan koefisien korelasi r_{12} dan r_{14} dalam interval $(-1, 1)$ submatriks utamanya adalah:

   $$R_{124} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{14} \\ r_{12} & 1 & r_{24} \\ r_{14} & r_{24} & 1 \end{bmatrix}$$

   $$det(R_{124}) = -r_{24}^2 + (2r_{12}r_{14})r_{24} + (1 - r_{12}^2 - r_{14}^2) \geq 0$$

   Batas interval untuk koefisien korelasi r_{24} adalah:

   $$L_{24}^{(1)} \leq r_{24} \leq U_{24}^{(1)}$$

   dengan batas bawah

   $$L_{24}^{(1)} = r_{12}r_{14} - \sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{14}^2)}$$

dan batas atas

$$U_{24}^{(1)} = r_{12}r_{14} + \sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{14}^2)}$$

c. Jika ditetapkan koefisien korelasi r_{12} dan r_{15} dalam interval $(-1, 1)$ submatriks utamanya adalah:

$$R_{125} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{15} \\ r_{12} & 1 & r_{25} \\ r_{15} & r_{25} & 1 \end{bmatrix}$$

$$det(R_{125}) = -r_{25}^2 + (2r_{12}r_{15})r_{25} + (1 - r_{12}^2 - r_{15}^2) \geq 0$$

batas interval untuk koefisien korelasi r_{25} adalah:

$$L_{25}^{(1)} \leq r_{25} \leq U_{25}^{(1)}$$

dengan batas bawah

$$L_{25}^{(1)} = r_{12}r_{15} - \sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{15}^2)}$$

dan batas atas

$$U_{25}^{(1)} = r_{12}r_{15} + \sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{15}^2)}$$

d. Jika ditetapkan koefisien korelasi r_{13} dan r_{14} dalam interval $(-1, 1)$ submatriks utamanya adalah:

$$R_{134} = \begin{bmatrix} 1 & r_{13} & r_{14} \\ r_{13} & 1 & r_{34} \\ r_{14} & r_{34} & 1 \end{bmatrix}$$

$$det(R_{134}) = -r_{34}^2 + (2r_{13}r_{14})r_{34} + (1 - r_{13}^2 - r_{14}^2) \geq 0$$

batas interval koefisien korelasi r_{34} adalah:

$$L_{34}^{(1)} \leq r_{34} \leq U_{34}^{(1)}$$

dengan batas bawah

$$L_{34}^{(1)} = r_{13}r_{14} - \sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{14}^2)}$$

dan batas bawah

$$U_{34}^{(1)} = r_{13}r_{14} + \sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{14}^2)}$$

e. Jika ditetapkan koefisien korelasi r_{13} dan r_{15} dalam interval $(-1, 1)$ submatriks utamanya adalah:

$$R_{135} = \begin{bmatrix} 1 & r_{13} & r_{15} \\ r_{13} & 1 & r_{35} \\ r_{15} & r_{35} & 1 \end{bmatrix}$$

$$det(R_{135}) = -r_{35}^2 + (2r_{13}r_{15})r_{35} + (1 - r_{13}^2 - r_{15}^2) \geq 0$$

batas interval untuk koefisien korelasi r_{35} adalah:

$$L_{35}^{(1)} \leq r_{35} \leq U_{35}^{(1)}$$

dengan batas bawah

$$L_{35}^{(1)} = r_{13}r_{15} - \sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{15}^2)}$$

dan batas atas

$$U_{35}^{(1)} = r_{13}r_{15} + \sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{15}^2)}$$

f. Jika ditetapkan koefisien korelasi r_{14} dan r_{15} dalam interval $(-1, 1)$ submatriks utamanya adalah:

$$R_{145} = \begin{bmatrix} 1 & r_{14} & r_{15} \\ r_{14} & 1 & r_{45} \\ r_{15} & r_{45} & 1 \end{bmatrix}$$

$$det(R_{145}) = -r_{45}^2 + (2r_{14}r_{15})r_{45} + (1 - r_{14}^2 - r_{15}^2) \geq 0$$

batas interval untuk koefisien korelasi r_{45} adalah:

$$L_{45}^{(1)} \leq r_{45} \leq U_{45}^{(1)}$$

dengan batas bawah

$$L_{45}^{(1)} = r_{14}r_{15} - \sqrt{(1 - r_{14}^2)(1 - r_{15}^2)}$$

dan batas atas

$$U_{45}^{(1)} = r_{14}r_{15} + \sqrt{(1 - r_{14}^2)(1 - r_{15}^2)}$$

3. Menentukan koefisien korelasi menggunakan submatriks utama 3×3 yaitu

$$r_{ijk} = \begin{bmatrix} 1 & r_{ij} & r_{ik} \\ r_{ij} & 1 & r_{jk} \\ r_{ik} & r_{jk} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_{ji} & r_{ki} \\ r_{ji} & 1 & r_{jk} \\ r_{ki} & r_{jk} & 1 \end{bmatrix}$$

untuk $i, j, k \in \{2, 3, 4, 5\}$ dan $i \neq j \neq k$, karena bersifat simetris maka koefisien korelasi $r_{ij} = r_{ji}$ dan $r_{ik} = r_{ki}$

a. Jika ditetapkan koefisien korelasi r_{24} dan r_{34} dalam interval $(-1,1)$ submatriks utamanya adalah:

$$R_{423} = \begin{bmatrix} 1 & r_{42} & r_{43} \\ r_{42} & 1 & r_{23} \\ r_{43} & r_{23} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_{24} & r_{34} \\ r_{24} & 1 & r_{23} \\ r_{34} & r_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

$$det(R_{423}) = -r_{23}^2 + (2r_{24}r_{34})r_{23} + (1 - r_{24}^2 - r_{34}^2) \geq 0$$

batas interval untukkoefisien korelasi r_{23} adalah:

$$L_{23}^{(2)} \leq r_{23} \leq U_{23}^{(2)}$$

dengan batas bawah

$$L_{23}^{(2)} = r_{24}r_{34} - \sqrt{(1 - r_{24}^2)(1 - r_{34}^2)}$$

dan batas atas

$$U_{23}^{(2)} = r_{24}r_{34} + \sqrt{(1 - r_{24}^2)(1 - r_{34}^2)}$$

b. Jika ditetapkan koefisien korelasi r_{24} dan r_{34} dalam interval $(-1,1)$ submatriks utamanya adalah:

$$R_{324} = \begin{bmatrix} 1 & r_{32} & r_{34} \\ r_{32} & 1 & r_{24} \\ r_{34} & r_{24} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_{23} & r_{34} \\ r_{23} & 1 & r_{24} \\ r_{34} & r_{24} & 1 \end{bmatrix}$$

$$det(R_{324}) = -r_{24}^2 + (2r_{23}r_{34})r_{24} + (1 - r_{23}^2 - r_{34}^2) \geq 0$$

batas interval untuk koefisien korelasi r_{24} adalah:

$$L_{24}^{(2)} \leq r_{24} \leq U_{24}^{(2)}$$

dengan batas bawah

$$L_{24}^{(2)} = r_{23}r_{34} - \sqrt{(1 - r_{23}^2)(1 - r_{34}^2)}$$

dan batas atas

$$U_{24}^{(2)} = r_{23}r_{34} + \sqrt{(1 - r_{23}^2)(1 - r_{34}^2)}$$

c. Jika ditetapkan koefisien korelasi r_{24} dan r_{34} dalam interval $(-1,1)$ submatriks utamanya adalah:

$$R_{325} \begin{bmatrix} 1 & r_{32} & r_{35} \\ r_{42} & 1 & r_{23} \\ r_{43} & r_{23} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_{23} & r_{35} \\ r_{23} & 1 & r_{25} \\ r_{35} & r_{25} & 1 \end{bmatrix}$$

$$det(R_{325}) = -r_{25}^2 + (2r_{23}r_{35})r_{25} + (1 - r_{23}^2 - r_{35}^2) \geq 0$$

batas interval untuk koefisien korelasi r_{25} adalah:

$$L_{25}^{(2)} \leq r_{25} \leq U_{25}^{(2)}$$

dengan batas bawah

$$L_{25}^{(2)} = r_{23}r_{35} - \sqrt{(1 - r_{23}^2)(1 - r_{35}^2)}$$

dan batas atas

$$U_{25}^{(2)} = r_{23}r_{35} + \sqrt{(1 - r_{23}^2)(1 - r_{35}^2)}$$

d. Jika ditetapkan koefisien korelasi r_{23} dan r_{24} dalam interval $(-1, 1)$ submatriks utamanya adalah:

$$R_{234} = \begin{bmatrix} 1 & r_{23} & r_{24} \\ r_{23} & 1 & r_{34} \\ r_{43} & r_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

$$det(R_{234}) = -r_{34}^2 + (2r_{23}r_{24})r_{34} + (1 - r_{23}^2 - r_{24}^2) \geq 0$$

batas interval untuk koefisien korelasi r_{23} adalah:

$$L_{34}^{(2)} \leq r_{34} \leq U_{34}^{(2)}$$

dengan batas bawah

$$L_{34}^{(2)} = r_{23}r_{24} - \sqrt{(1 - r_{23}^2)(1 - r_{24}^2)}$$

dan batas atas

$$U_{34}^{(2)} = r_{23}r_{24} + \sqrt{(1 - r_{23}^2)(1 - r_{24}^2)}$$

e. Jika ditetapkan koefisien korelasi r_{23} dan r_{25} dalam interval $(-1, 1)$ submatriks utamanya adalah:

$$R_{235} = \begin{bmatrix} 1 & r_{23} & r_{25} \\ r_{23} & 1 & r_{35} \\ r_{25} & r_{35} & 1 \end{bmatrix}$$

$$det(R_{235}) = -r_{35}^2 + (2r_{23}r_{25})r_{35} + (1 - r_{23}^2 - r_{25}^2) \geq 0$$

batas interval untuk koefisien korelasi r_{35} adalah:

$$L_{35}^{(2)} \leq r_{35} \leq U_{35}^{(2)}$$

dengan batas bawah

$$L_{35}^{(2)} = r_{23}r_{25} - \sqrt{(1 - r_{23}^2)(1 - r_{25}^2)}$$

dan batas atas

$$U_{35} = r_{23}r_{25} + \sqrt{(1 - r_{23}^2)(1 - r_{25}^2)}$$

f. Jika ditetapkan koefisien korelasi r_{24} dan r_{25} dalam interval $(-1, 1)$ submatriks utamanya adalah:

$$R_{245} = \begin{bmatrix} 1 & r_{24} & r_{25} \\ r_{24} & 1 & r_{45} \\ r_{25} & r_{45} & 1 \end{bmatrix}$$

$$det(R_{245}) = -r_{45}^2 + (2r_{24}r_{25})r_{23} + (1 - r_{24}^2 - r_{25}^2) \geq 0$$

batas interval untuk koefisien korelasi r_{45} adalah:

$$L_{45}^{(2)} \leq r_{45} \leq U_{45}^{(2)}$$

dengan batas bawah

$$L_{45}^{(2)} = r_{24}r_{25} - \sqrt{(1 - r_{24}^2)(1 - r_{25}^2)}$$

dan batas atas

$$U_{45}^{(2)} = r_{23}r_{25} + \sqrt{(1 - r_{24}^2)(1 - r_{25}^2)}$$

4. Menentukan koefisien korelasi menggunakan determinan matriks R yaitu:

$$\begin{aligned}
\det(R) = 1 &- r_{12}^2 - r_{13}^2 - r_{14}^2 - r_{15}^2 - r_{23}^2 - r_{24}^2 - r_{25}^2 - r_{34}^2 - r_{35}^2 - r_{45}^2 + r_{12}^2 r_{34}^2 + r_{12}^2 r_{35}^2 \\
&+ r_{12}^2 r_{45}^2 + r_{13}^2 r_{24}^2 + r_{13}^2 r_{25}^2 + r_{13}^2 r_{45}^2 + r_{14}^2 r_{23}^2 + r_{14}^2 r_{25}^2 + r_{14}^2 r_{35}^2 + r_{15}^2 r_{23}^2 \\
&+ r_{15}^2 r_{24}^2 + r_{15}^2 r_{34}^2 + r_{23}^2 r_{45}^2 + r_{24}^2 r_{35}^2 + r_{25}^2 r_{34}^2 \\
&- 2(r_{34}r_{35}r_{45}r_{12}^2 + r_{24}r_{25}r_{45}r_{13}^2 + r_{23}r_{25}r_{35}r_{14}^2 + r_{23}r_{24}r_{34}r_{15}^2 \\
&+ r_{14}r_{15}r_{45}r_{23}^2 + r_{13}r_{15}r_{35}r_{24}^2 + r_{13}r_{14}r_{34}r_{25}^2 + r_{12}r_{15}r_{25}r_{34}^2 + r_{12}r_{14}r_{24}r_{35}^2 \\
&+ r_{12}r_{13}r_{23}r_{45}^2) \\
&+ 2(r_{12}r_{13}r_{23} + r_{12}r_{15}r_{25} + r_{13}r_{14}r_{34} + r_{13}r_{15}r_{35} + r_{14}r_{12}r_{24} + r_{14}r_{15}r_{45} \\
&+ r_{23}r_{24}r_{34} + r_{23}r_{25}r_{35} + r_{24}r_{25}r_{45} + r_{34}r_{35}r_{45}) \\
&- 2(r_{12}r_{13}r_{24}r_{34} + r_{12}r_{13}r_{25}r_{35} + r_{12}r_{14}r_{25}r_{45} + r_{12}r_{14}r_{23}r_{34} \\
&+ r_{12}r_{15}r_{23}r_{35} + r_{12}r_{15}r_{24}r_{45} + r_{13}r_{14}r_{23}r_{24} + r_{13}r_{14}r_{35}r_{45} + r_{13}r_{15}r_{23}r_{35} \\
&+ r_{13}r_{15}r_{34}r_{45} + r_{14}r_{15}r_{24}r_{25} + r_{14}r_{15}r_{34}r_{35} + r_{23}r_{24}r_{34}r_{45} + r_{23}r_{24}r_{35}r_{45} \\
&+ r_{24}r_{25}r_{34}r_{35}) + 2r_{12}r_{13}r_{45}(r_{24}r_{35} + r_{25}r_{34}) + 2r_{12}r_{15}r_{34}(r_{23}r_{45} + r_{24}r_{35}) \\
&+ 2r_{13}r_{14}r_{25}(r_{23}r_{45} + r_{24}r_{35}) + 2r_{13}r_{15}r_{24}(r_{23}r_{45} + r_{25}r_{34}) \\
&+ 2r_{14}r_{15}r_3(r_{24}r_{35} + r_{25}r_{34}) + 2r_{12}r_{14}(r_{23}r_{35}r_{45} + r_{25}r_{34}r_{35})
\end{aligned}$$

Persamaan di atas dapat ditulis menjadi persamaan kuadrat, yaitu::

$ar_{jk}^2 + br_{jk} + c \geq 0.$

Untuk memudahkan pencarian koefisien korelasi matriks 5×5 yang valid maka pada penelitian ini menggunakan Maple 13. Sehingga didapat batas bawah dan batas atas dari koefisien korelasi matriks tersebut.

Contoh 4.3.1

Akan ditunjukkan algoritma pembangun matriks korelasi dari matriks

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} \\ r_{12} & 1 & r_{23} & r_{24} & r_{25} \\ r_{13} & r_{23} & 1 & r_{34} & r_{35} \\ r_{14} & r_{24} & r_{34} & 1 & r_{45} \\ r_{15} & r_{25} & r_{35} & r_{45} & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

langkah 1

Dipilih sebarang nilai $r_{12} = 0{,}05$ $r_{13} = 0{,}001$ $r_{14} = 0{,}8$ $r_{15} = 0{,}59$

$$\text{Matriks } R = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}05 & 0{,}001 & 0{,}8 & 0{,}59 \\ 0{,}05 & 1 & r_{23} & r_{24} & r_{25} \\ 0{,}001 & r_{23} & 1 & r_{34} & r_{35} \\ 0{,}8 & r_{24} & r_{34} & 1 & r_{45} \\ 0{,}59 & r_{25} & r_{35} & r_{45} & 1 \end{bmatrix}$$

Langkah 2

a. Batas interval untuk koefisien korelasi r_{23} yaitu

$L_{23}^{(1)} \leq r_{23} \leq U_{23}^{(1)}$

dengan batas bawah

$$L_{23}^{(1)} = 0{,}05 \times 0{,}001 - \sqrt{(1 - 0{,}05^2)(1 - 0{,}001^2)}$$
$$= -0{,}9987$$

dan batas atas

$$U_{23}^{(1)} = 0{,}05 \times 0{,}001 + \sqrt{(1 - 0{,}05^2)(1 - 0{,}001^2)}$$
$$= 0{,}9987$$

interval untuk nilai koefisien korelasi r_{23} yaitu $-0{,}9987 \leq r_{23} \leq -0{,}9987$

b. Batas interval untuk koefisien korelasi r_{24} yaitu

$L_{24}^{(1)} \leq r_{24} \leq U_{24}^{(1)}$

dengan batas bawah

$$L_{24}^{(1)} = 0{,}05 \times 0{,}8 - \sqrt{(1 - 0{,}05^2)(1 - 0{,}8^2)}$$
$$= -0{,}5592$$

dan batas atas

$$U_{24}^{(1)} = 0{,}05 \times 0{,}8 + \sqrt{(1 - 0{,}05^2)(1 - 0{,}8^2)}$$
$$= 0{,}6392$$

interval untuk nilai koefisien korelasi r_{24} yaitu $-0{,}5592 \leq r_{24} \leq 0{,}6392$.

c. Batas interval untuk koefisien korelasi r_{25} yaitu

$L_{25}^{(1)} \leq r_{25} \leq U_{25}^{(1)}$

dengan batas bawah

$$L_{25}^{(1)} = 0{,}05 \times 0{,}59 - \sqrt{(1 - 0{,}05^2)(1 - 0{,}59^2)}$$
$$= -0{,}7758$$

dan batas atas

$$U_{25}^{(1)} = 0{,}05 \times 0{,}59 + \sqrt{(1 - 0{,}05^2)(1 - 0{,}59^2)}$$
$$= 0{,}8358$$

interval untuk nilai koefisien korelasi r_{25} yaitu $-0{,}7758 \leq r_{25} \leq 0{,}8358$.

d. Batas interval untuk koefisien korelasi r_{34} yaitu

$L_{34}^{(1)} \leq r_{34} \leq U_{34}^{(1)}$

dengan batas bawah

$$L_{34}^{(1)} = 0{,}001 \times 0{,}8 - \sqrt{(1 - 0{,}001^2)(1 - 0{,}8^2)}$$
$$= -0{,}5991$$

dan batas atas

$$U_{34}^{(1)} = 0{,}001 \times 0{,}8 + \sqrt{(1 - 0{,}001^2)(1 - 0{,}8^2)}$$
$$= 0{,}6007$$

interval untuk nilai koefisien korelasi r_{34} yaitu $-0{,}5591 \leq r_{34} \leq 0{,}6007$

e. Batas interval untuk koefisien korelasi r_{35} yaitu

$L_{35}^{(1)} \leq r_{35} \leq U_{35}^{(1)}$

dengan batas bawah

$$L_{35}^{(1)} = 0{,}001 \times 0{,}59 - \sqrt{(1 - 0{,}001^2)(1 - 0{,}59^2)}$$
$$= -0{,}6513$$

dan batas atas

$$U_{35}^{(1)} = 0{,}001 \times 0{,}59 + \sqrt{(1 - 0{,}001^2)(1 - 0{,}59^2)}$$
$$= 0{,}6524$$

interval untuk nilai koefisien korelasi r_{24} yaitu $-0{,}6513 \leq r_{24} \leq 0{,}6524$

f. Batas interval untuk koefisien korelasi r_{45} yaitu

$L_{45}^{(1)} \leq r_{45} \leq U_{45}^{(1)}$

dengan batas bawah

$$L_{45}^{(1)} = 0{,}8 \times 0{,}59 - \sqrt{(1 - 0{,}8^2)(1 - 0{,}59^2)}$$
$$= -0{,}08086$$

dan batas atas

$$U_{45}^{(1)} = 0{,}8 \times 0{,}59 + \sqrt{(1 - 0{,}8^2)(1 - 0{,}59^2)}$$
$$= 0{,}86314$$

interval untuk nilai koefisien korelasi r_{45} yaitu $-0{,}08086 \leq r_{45} \leq 0{,}86314$.

Langkah 3

a. Batas interval untuk koefisien korelasi r_{23} yaitu

$L_{23}^{(2)} \leq r_{23} \leq U_{23}^{(2)}$

dengan batas bawah

$$L_{23}^{(2)} = 0{,}3196 \times 0{,}3003 - \sqrt{(1 - 0{,}3196^2)(1 - 0{,}3003^2)}$$
$$= -0{,}2007$$

dan batas atas

$$U_{23}^{(2)} = 0{,}3196 \times 0{,}3003 + \sqrt{(1 - 0{,}3196^2)(1 - 0{,}3003^2)}$$
$$= 0{,}1925$$

interval untuk nilai koefisien korelasi r_{23} yaitu $-0{,}2007 \leq r_{23} \leq 0{,}1925$

b. Batas interval untuk koefisien korelasi r_{24} yaitu

$L_{24}^{(2)} \leq r_{24} \leq U_{24}^{(2)}$

dengan batas bawah

$$L_{24}^{(2)} = -0{,}499 \times 0{,}3003 - \sqrt{(1-(-0{,}499)^2)(1-0{,}3003^2)}$$
$$= -0{,}4223$$

dan batas atas

$$U_{24}^{(2)} = -0{,}499 \times 0{,}3003 + \sqrt{(1-(-0{,}499)^2)(1-0{,}3003^2)}$$
$$= 0{,}1227$$

interval untuk nilai koefisien korelasi r_{24} yaitu $-0{,}4223 \leq r_{24} \leq 0{,}1227$

c. Batas interval untuk koefisien korelasi r_{25} yaitu

$L_{25}^{(2)} \leq r_{25} \leq U_{25}^{(2)}$

dengan batas bawah

$$L_{25}^{(2)} = -0{,}499 \times 0{,}65 - \sqrt{(1-(-0{,}499)^2)(1-0{,}65^2)}$$
$$= -0{,}8284$$

dan batas atas

$$U_{25}^{(2)} = -0{,}499 \times 0{,}65 + \sqrt{(1-(-0{,}499)^2)(1-0{,}65^2)}$$
$$= 0{,}1819$$

interval untuk nilai koefisien korelasi r_{25} yaitu $-0{,}8284 \leq r_{25} \leq 0{,}1819$.

d. Batas interval untuk koefisien korelasi r_{34} yaitu

$L_{34}^{(2)} \leq r_{34} \leq U_{34}^{(2)}$

dengan batas bawah

$$L_{34}^{(2)} = -0{,}499 \times 0{,}3196 - \sqrt{(1-(-0{,}499)^2)(1-0{,}3196^2)}$$
$$= -0{,}9805$$

dan batas atas

$$U_{34}^{(2)} = -0{,}499 \times 0{,}3196 + \sqrt{(1-(-0{,}499)^2)(1-0{,}3196^2)}$$
$$= 0{,}6617$$

interval untuk nilai koefisien korelasi r_{34} yaitu $-0{,}9805 \leq r_{34} \leq 0{,}6617$.

e. Batas interval untuk koefisien korelasi r_{35} yaitu

$L_{35}^{(2)} \leq r_{35} \leq U_{35}^{(2)}$

dengan batas bawah

$$L_{35}^{(2)} = -0{,}499 \times 0{,}5 - \sqrt{(1-(-0{,}499)^2)(1-0{,}5^2)}$$
$$= -0{,}8994$$

dan batas atas

$$U_{35}^{(2)} = -0{,}499 \times 0{,}5 + \sqrt{(1-(-0{,}499)^2)(1-0{,}5^2)}$$
$$= 0{,}4004$$

interval untuk nilai koefisien korelasi r_{35} yaitu $-0{,}8994 \le r_{35} \le 0{,}4004$

f. Batas interval untuk koefisien korelasi r_{45} yaitu

$$L_{45}^{(2)} \le r_{45} \le U_{45}^{(2)}$$

dengan batas bawah

$$L_{45}^{(1)} = 0{,}3196 \times 0{,}5 - \sqrt{(1-0{,}3196^2)(1-0{,}5^2)}$$
$$= -0{,}5508$$

dan batas atas

$$U_{45}^{(1)} = 0{,}3196 \times 0{,}5 + \sqrt{(1-0{,}3196^2)(1-0{,}5^2)}$$
$$= 0{,}8704$$

interval untuk nilai koefisien korelasi r_{45} yaitu$-0{,}5508 \le r_{45} \le 0{,}8704$.

Langkah 4

Dengan menggunakan Maple 13 maka didapat L dan U untuk $r_{23}, r_{24}, r_{25}, r_{34}, r_{35}$ dan r_{45} yaitu

a. Batas interval untuk koefisien korelasi r_{23} yaitu

$$L_{23}^{(3)} \le r_{23} \le U_{23}^{(3)}$$

dengan batas bawah

$$L_{23}^{(3)} = 0{,}8076634080 + 0{,}0635688931010\, I$$

dengan batas atas

$$U_{23}^{(3)} = 0{,}8076634080 - 0{,}063568893101\, I$$

interval untuk nilai koefisien korelasi r_{23} yaitu

$$0{,}8076634080 + 0{,}0635688931010\, I \le r_{23} \le 0{,}8076634080 - 0{,}063568893101\, I$$

b. Batas interval untuk koefisien korelasi r_{24} yaitu

$L_{24}^{(3)} \leq r_{23} \leq U_{24}^{(3)}$

dengan batas bawah

$L_{24}^{(3)} = -0{,}2594981120$

dengan batas atas

$U_{24}^{(3)} = -1{,}707278163$

interval untuk nilai koefisien korelasi r_{24} yaitu

$-0{,}2594981120 \leq r_{24} \leq -1{,}707278163$

c. Batas interval untuk koefisien korelasi r_{25} yaitu

$L_{25}^{(3)} \leq r_{23} \leq U_{25}^{(3)}$

dengan batas bawah

$L_{25}^{(3)} = -0{,}6957678215 + 0{,}02935525240\ I$

dengan batas atas

$U_{25}^{(3)} = -0{,}6957678215 + 0{,}02935525240\ I$

interval untuk nilai koefisien korelasi r_{25} yaitu

$-0{,}6957678215 + 0{,}02935525240\ I \leq r_{25} \leq -0{,}6957678215 + 0{,}02935525240\ I$

d. Batas interval untuk koefisien korelasi r_{34} yaitu

dengan batas bawah

$L_{34}^{(3)} = -0{,}494225136 + 0{,}5015034545\ I$

dengan batas atas

$U_{34}^{(3)} = -0{,}494225136 + 0{,}5015034545\ I$

interval untuk nilai koefisien korelasi r_{34} yaitu

$-0{,}494225136 + 0{,}5015034545\ I \leq r_{34} \leq -0{,}494225136 + 0{,}5015034545\ I$

e. Batas interval untuk koefisien korelasi r_{35} yaitu

dengan batas bawah

$L_{35}^{(3)} = -0{,}3866898924$

dengan batas atas

$U_{35}^{(3)} = -0{,}6986503260$

interval untuk nilai koefisien korelasi r_{35} yaitu

$-0{,}3866898924 \leq r_{35} \leq -0{,}6986503260$

f. Batas interval untuk koefisien korelasi r_{34} yaitu

dengan batas bawah

$L_{45}^{(3)} = 1{,}111107294 + 0{,}1396008997\, I$

dengan batas atas

$U_{45}^{(3)} = 1{,}111107294 - 0{,}1396008997\, I$

interval untuk nilai koefisien korelasi r_{45} yaitu

$1{,}111107294 + 0{,}1396008997\, I \leq r_{45} \leq 1{,}111107294 - 0{,}1396008997\, I$

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh, maka matriks korelasi ordo 5×5 tidak dapat diselesaikan, karena hasilnya adalah bilangan imajiner.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Matriks korelasi elemen-elemennya adalah koefisien korelasi dengan nilai-nilai terletak pada interval [-1,1]. Kumpulan koefisien korelasi dapat disusun kedalam sebuah matriks. Algoritma pembangun matriks korelasi yang valid mempunyai syarat yaitu matriks simetris, nilai-nilai elemennya berada didalam interval [-1,1] dan bersifat semi definit positif. Algoritma pembangun matriks korelasi di dapat dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Memilih sebarang nilai koefisien korelasi untuk matriks 3×3 yaitu r_{12} dan r_{13} pada interval $(-1,1)$, untuk matriks 4×4 yaitu r_{12}, r_{13} dan r_{14} pada interval $(-1,1)$, untuk matriks 5×5 yaitu $r_{12,}\, r_{13}, r_{14}$ dan r_{15} pada interval $(-1,1)$.
2. Menentukan nilai r_{23} untuk matriks 3×3 dengan determinan dari matriks R, menentukan nilai r_{23}, r_{24} dan r_{34} untuk matriks 4×4 dengan determinan submatriks utama R_{1jk}, menentukan nilai $r_{23}, r_{24}, r_{25}, r_{34}, r_{35}$ dan r_{45} untuk matriks 5×5 dengan determinan submatriks utama R_{1jk}.
3. menentukan nilai r_{23}, r_{24} dan r_{34} untuk matriks 4×4 dengan determinan submatriks utama R_{ijk}, menentukan nilai $r_{23}, r_{24}, r_{25}, r_{34}, r_{35}$ dan r_{45} untuk matriks 5×5 dengan determinan submatriks utama R_{ijk}.
4. menentukan nilai r_{23}, r_{24} dan r_{34} untuk matriks 4×4 dengan determinan matriks R, menentukan nilai $r_{23}, r_{24}, r_{25}, r_{34}, r_{35}$ dan r_{45} untuk matriks 5×5 dengan determinan matriks R menggunakan Maple 13.

Berdasarkan langkah-langkah tersebut didapat hasil unruk matriks korelasi ordo 3×3 dan 4×4 adalah matriks korelasi yang valid, sedangkan untuk matriks ordo 5×5 adalah matriks korelasi bilangan imajiner. Sehingga untuk matriks yang berordo > 4 tidak didapat matriks korelasi yang valid.

5.2 Saran

Pada tugas akhir ini penulis hanya membahas algoritma untuk membangun matriks korelasi ordo 3×3, 4×4 dan 5×5. Matriks korelasi untuk ordo > 4 didapat bilangan imajiner. Penulis memberikan saran untuk menyelesaikan masalah matriks korelasi dengan algoritma yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H & Rorres C. *Aljabar Linier Elementer*. Jilid satu Edisi kedelapan. Erlangga, Jakarta. 2002.

____________________ . *Aljabar Linier Elementer*. Jilid dua Edisi kedelapan. Erlangga, Jakarta. 2002.

Budden, M, P. Hadavas, L. Hoffman dan C. Pretz. ”Generating Valid 4×4 Correlation Matrices”. *Applied Mathematics E-Notes*, 7, 53-59. 2007.

Graybill, Franklin A. *Matrices with Applications in Statistics*, Second Edition, Wadsworth Publishing company, Taipei, Taiwan. 1983.

Leon, S.J. *Aljabar Linier dan Aplikasinya (terjemahan)*. Edisi kelima. Erlangga, Jakarta. 2001.

Olkin , I . ”Range Restrictions for Product-Moment Correlation Matrices”, *Psychometrika*, 46, 469-472. 1981.

Rousseuw, P. J & G. Molenberghs. ”The Shape of Correlation Matrices”, *The American Statistician*, 48, 276-279. 1994.

Sutojo, T. Dkk. *Teori & aplikasi Aljabar Linier Elementer*, Andi, Yogyakarta. 2010.